

FICHE TECHNIQUE B

COURBE DES TAUX ET ARBITRAGE FIXE-VARIABLE

Par Olivier WOLF

SOMMAIRE

INTRODUCTION : la crise des emprunts toxiques a eu pour vertu de rappeler que la finalité de l'endettement des collectivités locales est le financement des investissements collectifs et non la recherche de marges de manœuvre hypothétiques en jouant les deniers publics sur les marchés financiers. C'est ainsi que les offres dites sans risques, classées A1 dans la charte Gissler, représentent désormais l'essentiel des propositions commerciales des établissements bancaires. Dans ce contexte, réduire l'asymétrie d'information par la maîtrise des règles basiques de mathématiques financières peut améliorer le jeu concurrentiel. Cette fiche a pour objet, à partir d'un exemple pratique, de détailler une méthodologie pour comparer des offres bancaires.

1. L'EXTRAPOLATION DES INDEXS A PARTIR DE LA COURBE DES SWAPS

- 1.1 La notion de courbe zéro coupon
- 1.2 Construction de la courbe zéro coupon et extrapolation du taux variable

2. LA COMPARAISON DES PROPOSITIONS

- 2.1 Offre n° 1 (Euribor préfixé + 150 points de base)
- 2.2 Offre n° 2 (taux fixe : 3,50 % et amortissement constant)
- 2.3 Offre n° 3 (taux fixe : 3,55 % et annuité constante)
- 2.4 Offre n° 4 (Euribor postfixé + 100 points de base)

CONCLUSION : l'analyse d'offres bancaires n'intégrant pas d'options ne pose aucune difficulté technique particulière car elle est le résultat de calculs normalisés. Si le prix d'un produit est un déterminant majeur du choix, la construction d'une stratégie de gestion du risque de taux qui passe par l'arbitrage entre index, n'en reste pas moins essentielle.

La gestion de la dette a été compliquée ces dix dernières années par l'émergence de nombreux produits complexes intégrant des ventes d'options élaborées à partir de références plus ou moins exotiques. Croyant avoir découvert la martingale, nombre de collectivités, imprudentes ou mal informées, ont accepté de prendre un risque démesuré sur le futur en échange d'un avantage immédiat. La crise financière de 2008 a favorisé la réalisation des scénarii les plus défavorables et entraîné la ruine de ce modèle spéculatif.

Cet épisode douloureux pour les finances locales a néanmoins eu le mérite de rappeler une évidence : la dette a pour finalité le financement des investissements publics et n'est pas intrinsèquement un levier d'amélioration de l'épargne brute. S'il est de bonne politique financière de couvrir les risques, le principal enjeu consiste à bénéficier, par le jeu concurrentiel, des meilleures conditions de marché. Le retour à des pratiques plus saines rend toute son actualité aux « fondamentaux » de la gestion de dette, qui sont l'arbitrage entre taux fixe et taux variable et la comparaison des marges bancaires.

La présente fiche a pour objet de proposer une méthodologie en ce sens.

On prendra comme exemple une collectivité qui a reçu quatre offres de financement pour une durée de 5 années : quelle est la plus avantageuse financièrement ?

Offre	Index	Amortissement	Taux ou marge	Conditions
n°1	Euribor préfixé	linéaire	+ 1,50%	
n°2	Taux fixe	linéaire	3,50 %	frais 0,05%
n°3	Taux fixe	progressif	3,55 %	
n°4	Euribor posfixé	linéaire	+ 1,00 %	

Partant des conditions de marché, les investisseurs (et les intermédiaires) ajoutent une marge qui reflète leur appréciation de la qualité de signature des emprunteurs : comparer les prix offerts aux collectivités consiste à identifier, toutes choses égales d'ailleurs, cette marge incluse dans chacune des offres.

1. L'EXTRAPOLATION DES INDEXS À PARTIR DE LA COURBE DES SWAPS

Le taux d'intérêt est le loyer d'équilibre qui s'établit entre prêteurs et emprunteurs, exprimant la valeur que les uns et les autres donnent au temps qui coule entre maintenant et chaque échéance future. Rien n'exige que ce « *prix du temps* » suive une relation régulière en fonction de la durée du placement, tant sont incertains et complexes les éléments d'anticipation sur les perspectives à venir. Les courbes de taux représentent graphiquement la variation de cet équilibre financier selon les échéances, et il existe à tout moment sur les marchés une multitude de courbes qui traduisent les conditions propres à chaque type de contrat. Ces graphiques peuvent être soit dressés directement à partir des cotations (emprunts d'Etat, opérations interbancaires), soit déduits implicitement par transformation d'une autre courbe.

1.1 La notion de courbe zéro coupon

Les données les plus accessibles et les plus couramment utilisées sont tirées des prêts entre banques de première catégorie, et plus précisément des contrats d'échange entre l'ensemble des échéances d'un prêt à taux fixe et les mêmes échéances à taux variable¹. Elle est donc formée d'une suite de valeurs pour les durées de prêt de plus en plus longues (appelées maturités) depuis un an jusque soixante ans².

¹ Appelée courbe des swaps du marché interbancaire. Le taux variable échangé sera le taux constaté à chaque échéance pour un contrat de courte durée (jusque un an).

² Pour chaque maturité, la valeur retenue est la moyenne arithmétique des conditions proposées à l'achat et à la vente. L'accès aux données est relativement aisé, la plupart des organismes financiers transmettant cette chronique dans leur newsletter. Il est également possible d'obtenir une information en temps réel auprès d'agences spécialisées.

La pente de la courbe des taux de swap est généralement croissante, illustrant le fait que les investisseurs hésitent d'autant plus à s'engager que l'échéance est plus lointaine (ce qu'on décrit comme la préférence pour la liquidité)³.

Mais cette courbe des swaps relevée sur les marchés comporte une insuffisance d'information tenant à ce que les contrats à taux fixe qui servent de référence prévoient le paiement périodique des intérêts calculés au taux facial du prêt appliqué sur le capital emprunté initialement (i.e. le versement de coupons⁴). Il s'ensuit qu'on ne sait pas directement à quelles conditions le produit de ces coupons intercalaires pourra, au besoin, être remplacé d'échéance en échéance jusqu'au terme du contrat, de même qu'on ignore pour les mêmes échéances le futur taux variable qu'anticipe le marché à travers la garantie de swap.

Pour récupérer ces indications indispensables à une comparaison homogène de toutes les offres disponibles, il est possible de passer par une courbe virtuelle. Celle-ci associe à chaque maturité le taux fixe que devrait offrir un prêt dont les intérêts intercalaires seraient contractuellement capitalisés jusqu'à son terme pour que son rendement final soit identique à celui du contrat à taux fixe de référence dont les coupons successifs seraient remplacés d'échéance en échéance selon la suite des taux courts alors disponibles et implicitement anticipés dans les swaps. La courbe du taux virtuel de ces titres équivalents à capitalisation intégrale est appelée « zéro coupon »⁵.

La relation de correspondance entre la courbe des swaps, celle des taux zéro-coupon associée et celle des futurs taux variables implicites sera ainsi obtenue en posant, pour chaque maturité, la parité du produit final selon les trois schémas de placement.

Soient :

- $s_1, s_2, s_3 \dots \rightarrow s_m$ la suite (connue) des swaps taux fixe / euribor 12 mois⁶ à 1 an, 2 ans, 3 ans et jusqu'à la maturité m ;
- $z_1, z_2, z_3 \dots \rightarrow z_m$ la suite des taux zéro coupon virtuels que l'on recherche aux mêmes maturités ;
- et $e_1, e_2, e_3 \dots \rightarrow e_m$ la suite des taux euribor 12 mois implicitement anticipés par le marché que l'on recherche également sur les échéances dans 1 an, 2 ans, 3 ans et jusque m (leur taux ayant été conclu 12 mois plus tôt) ;

- A l'échéance un an, tout est simple : $s_1 = z_1 = e_1$.

Il y a, par définition, égalité entre la rémunération qu'on obtiendra au terme des 12 mois d'un taux fixe conclu en T_0 pour une seule année, de l'Euribor 12 mois souscrit dans les mêmes conditions et du taux zéro coupon équivalent (puisqu'il n'y a pas d'intérêts intercalaires).

³ Il peut arriver, toutefois, que les opérateurs placés devant une situation immédiate extrêmement tendue (associée à des taux à court terme très élevés, mais qui ne paraissent pas économiquement soutenables sur la longue durée) anticipent que la situation finira pas s'améliorer à moyen / long terme, ce que le marché traduit par une inversion de la courbe des swaps sur les durées plus éloignées.

⁴ La référence est donc un prêt in fine avec remboursement en une fois du capital lors de la dernière échéance et paiement du même coupon d'intérêts à chaque échéance intercalaire. Il en va de même des échéances à taux variable qui seront échangées avec la contrepartie du swap.

⁵ Le taux virtuel associé à chaque maturité qui représente la rémunération attendue d'un placement capitalisé jusque cette échéance nous donne bien le « prix du temps » pour la durée correspondante. On le qualifie aussi de « taux actuariel » qui exprime la valeur relative d'un même flux de monnaie au présent et dans le futur. Ainsi, 100 € aujourd'hui ont la même valeur actuarielle que la même somme au temps t si elle est abondée d'une rémunération au taux actuariel a : $100 \times (1 + a)^t$. Le taux actuariel est donc le taux d'actualisation qui rend équivalent le prêt d'une somme en t_0 et les flux remboursés à différentes échéances.

⁶ Euribor pour « Euro Inter Bank Offered Rate » (taux interbancaire offert en Euro). L'Euribor 12 mois est le taux moyen constaté sur les contrats de prêt à un an d'un panel de banques européennes qui (parmi d'autres) peut être utilisé pour les contrats de swap contre les échéances d'un contrat pluriannuel de référence à taux fixe. A noter toutefois qu'il est conventionnellement affiché pour des intérêts calculés sur 360 jours alors que la liquidation de ces derniers s'opérera naturellement sur la durée « exacte » du prêt (365 ou 366 jours).

- Sur la maturité 2 ans :

- s'agissant du prêt à taux fixe s_2 échangé dans le swap, il assurera à 12 mois son coupon s_2 et au terme de 24 mois le même coupon ajouté au remboursement du capital = $s_2 + 1$. Pour déterminer le produit final que l'on pourrait obtenir à cette échéance des 2 ans, il faut faire l'hypothèse que le coupon reçu à 12 mois aura été replacé aux conditions du moment, i.e. l'Euribor 12 mois. D'où à 24 mois un flux total = $s_2 \times (e_2 + 1) + s_2 + 1$;

- s'agissant du zéro coupon, par définition, son échéance capitalisée à 24 mois sera = $(1 + z_2)^2$;

- quant à la chaîne capitalisée des Euribors 12 mois successivement échangés dans le swap⁷, son produit final sera = $(1 + e_1) \times (1 + e_2)$;

De l'ensemble, en posant la parité des trois produits, on retient les deux équations suivantes :

$$(1 + z_2)^2 = [s_2 \times (e_2 + 1)] + s_2 + 1 = (1 + e_1) \times (1 + e_2).$$

- Sur la maturité 3 ans, on obtiendra suivant le même raisonnement les deux nouvelles équations suivantes :

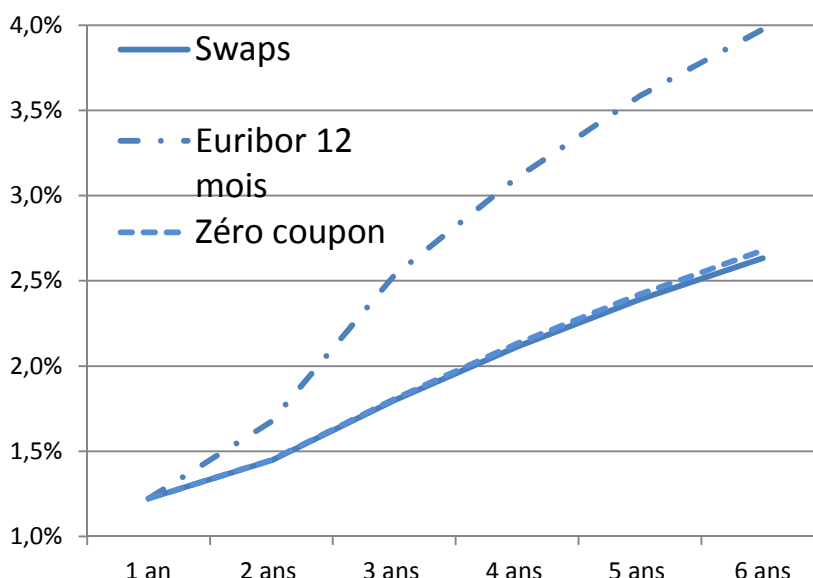
$$(1 + z_3)^3 = [s_2 \times (e_2 + 1) \times (e_3 + 1)] + [s_2 \times (e_3 + 1)] + s_2 + 1 = (1 + e_1) \times (1 + e_2) \times (1 + e_3).$$

Et ainsi de suite de maturité en maturité : on dispose dès lors pour chaque maturité d'un système à 2 équations pour 2 variables (z et e) dont la solution dépend des solutions trouvées dans le système de rang précédent. La résolution en est donc aisée si l'on commence par l'égalité des trois taux à un an et que l'on enchaîne ensuite les maturités successives⁸.

1.2 Construction de la courbe zéro coupon et extrapolation du taux variable

On illustrera la résolution du système par l'exemple numérique suivant :

Durée	Swaps
1 an	1,222%
2 ans	1,445%
3 ans	1,799%
4 ans	2,113%
5 ans	2,390%
6 ans	2,633%



⁷ A ce stade, pour la clarté de la démonstration, on suppose que l'Euribor 12 mois est affiché pour le nombre de jours exact de l'année (cf. note précédente).

⁸ Méthode dite du Bootstrap (ou encore « amorçage »).

Il existe plusieurs approches pour résoudre la suite des systèmes exposée ci-dessus, selon que l'on privilégie d'abord l'extrapolation de la chaîne des taux variables anticipés (au cas d'espèce les Euribors 12 mois) ou la détermination des valeurs successives de la courbe zéro coupon.

Si l'on s'attache prioritairement à la relation donnée par la courbe des swaps entre taux fixe et Euribor, on tire du principe de parité du produit final entre les trois schémas de placement l'équation générale suivante pour toute maturité m :

$$(1 + e_1) \times \dots \times (1 + e_m) = s_m \times [(1 + e_2) \times \dots \times (1 + e_m) + \dots + (1 + e_m)] + s_m + 1$$

D'où l'on déduit l'équation récurrente suivante, en posant $(1 + e_1) \times \dots \times (1 + e_{m-1}) = E_{m-1}$:

$$E_{m-1} \times (1 + e_m) = \frac{[(1 + e_m) \times (E_{m-1} - 1 - s_{m-1}) \times s_m]}{s_{m-1}} + [s_m \times (1 + e_m)] + s_m + 1$$

$$D'où l'on sort la valeur cherchée pour $e_m = \frac{s_{m-1} \times (s_m + 1)}{[E_{m-1} \times (s_{m-1} - s_m)] + s_m} - 1^9$$$

Il ne reste plus qu'à récupérer les valeurs zéro coupon en utilisant la relation : $(1 + z_m)^m = E_m$
La démarche s'illustre numériquement comme suit :

Maturité m	Swap s_m	Euribor 12 e_m 365	Produit E_m	Zéro coupon z_m	Euribor 12 e_m 360
1	1,222%	1,222%	1,012	1,222%	1,205%
2	1,440%	1,662%	1,029	1,442%	1,639%
3	1,799%	2,541%	1,055	1,807%	2,507%
4	2,113%	3,106%	1,088	2,130%	3,064%
5	2,390%	3,585%	1,127	2,419%	3,535%
6	2,633%	3,975%	1,172	2,677%	3,921%

• Si, inversement, on souhaite disposer tout de suite de la courbe zéro coupon, ou s'appuiera sur l'équation générale suivante qui se déduit de la série des swaps :

$$1 = s_m \times \left[\frac{1}{(1 + z_1)^1} + \dots + \frac{1}{(1 + z_{m-1})^{m-1}} \right] + \frac{s_m + 1}{(1 + z_m)^m}$$

$$\text{En posant } S_m = \frac{1}{(1 + z_1)^1} + \dots + \frac{1}{(1 + z_m)^m},$$

$$\text{on obtient } (1 + z_m)^m = \frac{s_m + 1}{1 - (s_m \times S_{m-1})}$$

Il reste à tirer la série des Euribors¹⁰ de celle des zéro coupons par la relation $(1 + z_m)^m = e_m \times E_{m-1}$
D'où le tableau d'illustration numérique (aisément modélisable sur tableur) :

⁹ Cette valeur correspond à une durée exacte de liquidation des intérêts. Pour retrouver l'Euribor affiché (e_m avec 360), il faut corriger par le rapport 360/365.

¹⁰ Voir note précédente.

Maturité m	Swap s_m	Somme S_m	Zéro coupon z_m	Euribor 12 e _m 365	Euribor 12 e _m ' 360
1	0,01222	0,0000	1,222%	1,222%	1,205%
2	0,01440	0,9879	1,442%	1,662%	1,639%
3	0,01799	1,9597	1,807%	2,541%	2,507%
4	0,02113	2,9074	2,130%	3,106%	3,064%
5	0,02390	3,8265	2,419%	3,585%	3,535%
6	0,02633	4,7139	2,677%	3,975%	3,921%

2. LA COMPARAISON DES PROPOSITIONS

Pour être incontestable, la comparaison des offres doit neutraliser les caractéristiques propres à chacune qui sont de nature à peser sur leur coût intrinsèque, s'agissant notamment du profil d'amortissement du capital ou des modalités de facturation des intérêts¹¹. A cet effet s'impose un étalon commun, celui du calcul actuariel, qui consiste à valoriser tous les flux contractuels (tels qu'exactement projetés en application des clauses contractuelles) à raison du « *prix du temps* » (vu à la date du choix) que donne implicitement le marché pour chaque échéance. Par construction ce prix est fourni par la courbe zéro coupon.

Partant de là, il s'agira dès lors pour chacune des propositions commerciales de déterminer la valeur actuelle nette (VAN) de l'ensemble de ses flux débiteurs (tels que résultant précisément de l'application de ses dispositions contractuelles), puis de rechercher par simulation de quel taux il faudrait réduire le calcul des intérêts pour que la VAN égale le montant de l'emprunt¹². Ainsi sera-t-on en mesure de comparer leurs marges effectives globales par rapport aux conditions de marché.

2.1 Offre n° 1 (Euribor préfixé + 150 points de base)

La proposition qui ne comporte pas de frais initiaux prévoit un amortissement linéaire du capital. Les intérêts sont évidemment facturés sur une base exact/365j.

Maturité	Taux actualisation	Eur12 (360) préfixé +marge	CRD	Capital	Intérêts (365 j)	Annuité actualisée	Marge	Annuité corrigée
1	1,222%	2,705%	100	20	2,74	22,47	1,521	20,97
2	1,447%	3,139%	80	20	2,55	21,91	1,217	20,73
3	1,807%	4,007%	60	20	2,44	21,26	0,913	20,40
4	2,130%	4,564%	40	20	1,85	20,08	0,608	19,52
5	2,419%	5,035%	20	20	1,02	18,65	0,304	18,38
						104,38	1,521%	100,00

Pour une marge annoncée de 1,50 %, la marge effective (intégrant le nombre exact de jours d'intérêts), obtenue en utilisant la fonction « valeur cible » d'un tableur s'établit donc à 1,521 %.

¹¹ On suppose ici que les échéances sont payées exactement une année après le versement des fonds. En cas de date de valeur différente, il conviendra d'ajuster les calculs.

¹² Pour faciliter la lecture, celui-ci sera ramené à 100.

2.2 Offre n° 2 (taux fixe : 3,50 % et amortissement constant)

Les conditions d'amortissement sont analogues aux précédentes. La facturation des intérêts est affichée de manière transparente pour l'année entière.

Maturité	Taux actualisation	Taux fixe	CRD	Capital	Intérêts	Annuité actualisée	Marge	Annuité corrigée
0	0,000%				0,05	0,05		0,05
1	1,222%	3,50%	100,00	20,00	3,50	23,22	1,529	21,71
2	1,447%	3,50%	80,00	20,00	2,80	22,15	1,223	20,97
3	1,807%	3,50%	60,00	20,00	2,10	20,94	0,918	20,07
4	2,130%	3,50%	40,00	20,00	1,40	19,67	0,612	19,11
5	2,419%	3,50%	20,00	20,00	0,70	18,37	0,306	18,10
						104,40	1,529%	100,00

La marge effective obtenue (prenant en compte l'effet actuariel du profil d'amortissement) s'établit à 1,512 %. L'ajout d'une commission de 0.05 % du montant du capital emprunté à payer à l'encaissement des fonds augmente la marge de 0,017 %. Elle est donc portée à 1,529 %.

2.3 Offre n° 3 (taux fixe : 3,55 % et annuité constante)

Avec une annuité constante classique (22,18 pour un emprunt de 100 sur 5 ans à 3,55 %), le remboursement du capital s'effectue de manière exponentielle.

Maturité	Taux actualisation	Taux fixe	CRD	Capital	Intérêts	Annuité actualisée	Marge	Annuité corrigée
1	1,222%	3,55%	100,00	18,63	3,55	21,91	1,546	20,38
2	1,447%	3,55%	81,37	19,29	2,89	21,55	1,258	20,33
3	1,807%	3,55%	62,08	19,98	2,20	21,02	0,960	20,11
4	2,130%	3,55%	42,10	20,69	1,49	20,39	0,651	19,79
5	2,419%	3,55%	21,42	21,42	0,76	19,68	0,331	19,39
						104,55	1,546%	100,00

Du fait du taux facial plus élevé (que ne suffit pas à compenser un profil d'amortissement plus avantageux puisque l'annuité est légèrement décalée dans le futur), la marge globale s'établit à 1,546 %.

2.4 Offre n° 4 (Euribor postfixé + 100 points de base)

Un taux postfixé est un taux déterminé durant la période au cours de laquelle il s'applique et non une année avant à l'instar du préfixé : ici, les intérêts sont liquidés à chaque échéance sur la base de l'Euribor 12 mois ^(360 j) qui s'appliquera un an plus tard (la collectivité ne connaît donc sa valeur que quelques jours avant l'échéance)¹³.

¹³ La courbe des taux étant ordinairement croissante, aller chercher le fixing de la maturité suivante représente un surcoût qui doit être balancé par une marge moindre.

Maturité	Taux actualisation	Eur12 postfixé (360) +marge	CRD	Capital	Intérêts (365j)	Annuité	Marge	Annuité corrigée
1	1,222%	2,639%	100	20	2,68	22,40	1,599	20,82
2	1,447%	3,507%	80	20	2,84	22,20	1,279	20,95
3	1,807%	4,064%	60	20	2,47	21,30	0,960	20,39
4	2,130%	4,535%	40	20	1,84	20,07	0,640	19,49
5	2,419%	4,921%	20	20	1,00	18,63	0,320	18,35
						104,60	1,599%	100,00

L'offre du taux variable postfixé, bien qu'alléchante en termes d'affichage, n'est pas compétitive puisque la marge effective est de 1,599 %¹⁴.

En synthèse, il apparaît ainsi que le taux variable préfixé (offre n° 1) constitue la proposition la plus avantageuse, la marge effective ressortant à 1,521 %. L'offre n° 2 taux fixe à 3,50 % avec amortissement linéaire est à peine supérieure (1,529 %). L'étroitesse des écarts justifie que l'on veille à faire preuve du maximum de précision et de rigueur dans les méthodes et le calcul.

CONCLUSION

La comparaison entre offres bancaires simples ne pose aucune difficulté technique particulière (autre qu'un peu d'hygiène de procédure) car elle n'est qu'une simple application de formules mathématiques aisément modélisables sur tableur.

Cette cotation, bien qu'essentielle, ne doit néanmoins pas être l'élément d'appréciation exclusif pour un gestionnaire de dette.

En effet, la gestion du risque de taux¹⁵, et donc la stratégie de pondération entre le fixe et le variable dans l'encours de dette, fonction des conditions du marché et des anticipations propres, constitue certainement un déterminant plus important que la recherche du gain d'un ou deux points de base.

¹⁴ La comparaison avec l'offre n° 1 (dont les autres caractéristiques sont identiques) fait ressortir un surcoût de 78 points de base.

¹⁵ Risque de fluctuation ultérieure des taux : si variable → hausse des taux variables et donc dégradation de l'épargne brute, si fixe → ne pas profiter d'une baisse des taux.